V-3 (33 min) 6-Febrero-2019	**Repaso Integrales y Jacobiano**
Resumen de Miguel Cañizares	**Integrales Gaussianas**

En el video se hace, en primer lugar un repaso rápido de integrales simples y dobles, cambio de variable, etc.

Cambio de variables en integrales dobles: Jacobiano

Cuando hay que hacer un cambio de las dos variables en una integral doble $\iint f(x,y)\cdot dx\cdot dy$,

$x = X(u,v)$
$y = Y(u,v)$ se puede demostrar que: $\boldsymbol{f(x,y)\cdot dx\cdot dy = f[X(u,v),Y(u,v)]\cdot |J(u,v)|\cdot du\cdot dv}$

Siendo $|J(u,v)|$ el valor absoluto del determinante Jacobiano: $\boldsymbol{|J(u,v)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}}$

Ejemplo: $\iint (x^2+y^2)dx\cdot dy$ la resolvemos cambiado a coordenadas polares:

$x = r\cdot\cos\theta$

$y = r\cdot\sin\theta$

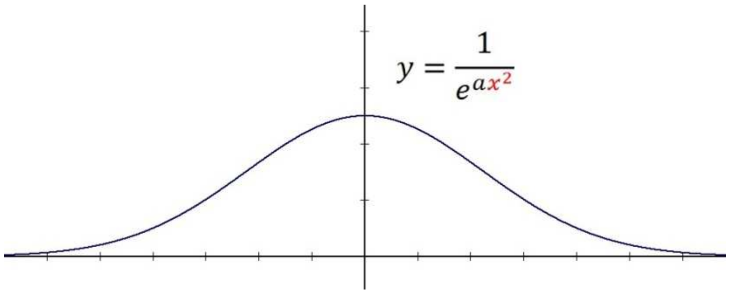
$$|J(r,\theta)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\iint (x^2+y^2)dx\cdot dy = \iint [(r\cdot\cos\theta)^2 + (r\cdot\sin\theta)^2]\cdot r dr\cdot d\theta = \iint r^3\, dr\cdot d\theta = \int d\theta\cdot\int r^3 dr = \theta\cdot\frac{r^4}{4} + C$$

Integral Gaussiana

La integral básica de la curva de Gauss es:

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$



No se puede hacer de forma analítica, pero se pude demostrar ese resultado relacionándola con otra integral doble, que si se puede hacer:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx\cdot dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \xrightarrow{dos\ integrales\ iguales} = G\cdot G = G^2$$

Hallamos la integral G^2 con cambio a coordenadas polares (Jacobiano calculado en el ejemplo anterior): $|J| = r$

$\left.\begin{array}{l} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \end{array}\right\} -x^2 - y^2 = -r^2$

Se abarca todo el plano en cartesianas con límites de (x ,y) de -∞ a +∞
En polares los límites serán: *r [0, ∞]* y *θ [0, 2π]*

$$G^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r\cdot dr\cdot d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^{\infty} r\, e^{-r^2} dr = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2} d\, r$$

La primitiva de esa integral es casi inmediata y resulta: $-\frac{1}{2}e^{-r^2}$ (se comprueba derivando).

Nos queda:

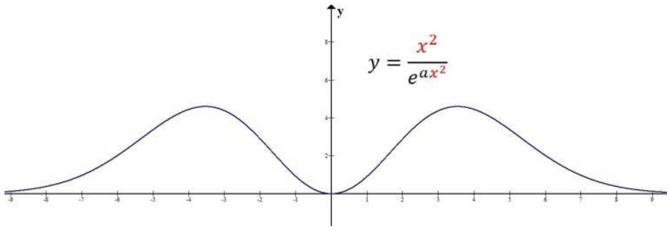
$$G^2 = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = 2\pi\left(-0+\frac{1}{2}\right) = \pi \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{G = \sqrt{\pi}}$$

Una vez resuelta la integral gaussiana básica, podemos calcular muy fácilmente otra más general que incluye una constante *"a"* en el exponente. Con cambio de variable: $ax^2 = t^2 \quad\rightarrow\quad dx = \frac{1}{\sqrt{a}}dt$ se obtiene el resultado que destacamos:

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}} \qquad \textbf{(I)}$$

Otra integral tipo gaussiana $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\, dx$

La función se muestra en la figura.



Se puede calcular a partir del resultado anterior, derivando respecto a a la constante *"a"* en los dos miembros de la igualdad (en este caso se puede meter la derivada dentro de la integral):

$$\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{d}{da}\left(\sqrt{\pi}\, a^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} -x^2 e^{-ax^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, a^{-\frac{3}{2}}$$

Eliminando el signo menos a ambos lados, nos queda el resultado:

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ a^{-\frac{3}{2}}} \qquad \textbf{(II)}$$

Al anterior resultado se puede llegar también al resolver por partes la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$,

haciendo $u = e^{-ax^2},\ dv = dx$

<u>Se puede deducir por inducción (no está en el video)</u> la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2}\, dx$ **(n=1, 2, 3…)**

Con la derivada primera, respecto a *"a"*, hemos llegado al resultado anterior, que corresponde a *(n=1)*. Reiterando el proceso con la derivada segunda *(n=2)*, la derivada tercera *(n = 3)*, la derivada cuarta *(n=4)* …. Basta con esas para darse cuenta que se induce el siguiente resultado general:

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\ a^{-\frac{1}{2}(2n+1)} \cdot (2n-1)!!} \qquad \textbf{(III)}$$

El <u>doble factorial</u> es un factorial, pero sólo con números impares: (2n-1)!! = (2n-1)·(2n-3)·(2n-5)… 5·3·1
Para (*n = 0)* también sirve la expresión general, (III) obteniéndose (I) aunque hemos de considerar (-1)!! = 1

<u>Ejercicio propuesto</u> :

Si el valor promedio de "algo" $\boxdot$ lo calculamos como:

$$\boldsymbol{\langle \boxdot \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \boxdot \cdot e^{-\frac{a}{2}x^2} \cdot dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} \cdot dx}} \qquad \textbf{(IV)}$$

a) Demostrar que el valor medio **<** ***x*** **>** *es nulo* $\quad \boldsymbol{\langle x^n \rangle = 0}\ \ \textit{si n es impar} \qquad$ **(V)**

b) Calcular el valor medio **<** $\boldsymbol{x^2}$ **>**

c) Demostrar que el valor medio **<** $\boldsymbol{x^{2n}}$ **>** es: $\quad \boldsymbol{\langle x^{2n} \rangle = \frac{1}{a^n}(2n-1)\cdot(2n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1} \qquad$ **(VI)**

siendo n un número natural.

Los resultados de estos ejercicios, que hemos destacado y numerado, se emplearán más adelante